1. Skupovi

**1.** Pojmovi: skup, element skupa (), prazan skup (). Načini zadavanja skupova, skupovna inkluzija() , jednakost skupova (=), partitivni skup skupa X (, ).

Pod pojmom skupa podrazumijevamo svaku množinu nekih članova koje nazivamo elementima.

Prazan skup je onaj podskup univerzalnog skupa koji ne sadrži niti jedan element.

... oznake elemenata; ... oznake skupova.

Skupove možemo zadavati:

1. popisivanjem njegovih elemenata, ako je to moguće: npr.
2. opisno pomoću nekog svojstva. Točnije, skup A svih elemenata koji imaju neku vlastitost označavamo sa

Kažemo da je skup podskup skupa ako je sadržan u , tj. ako za svaki element vrijedi da ako je, onda je . Pišemo .

Kažemo da je pravi podskup od ako vrijedi i . Pišemo .

Kažemo da su skupovi i jednaki ako vrijedi i .

Neka je skup. Skup svih podskupova od nazivamo partitivni skup od i označavamo sa ili .

Na partitivnom skupu dobro su definirane 3 osnovne operacije:

* Unija ,
* Presjek
* Komplementiranje .

**2.** Operacije unije , presjeka i razlike skupova . Osnovna svojstva ovih operacija (citirati teorem i dokazati pojedina svojstva).

Neka su skupovi (podskupovi univerzalnog skupa ).

* Skup nazivamo unija skupova . Oznaka .
* Skup nazivamo presjek skupova . Oznaka .
* Skup nazivamo razlika skupova . Oznaka .

Teorem: Neka su . Tada vrijedi:

1. Idempotentnost unije i presjeka:

2. Asocijativnost:

3. Komutativnost:

4. Distributivnost:

5. De Morganove formule:

6.

7.

8. Komplementiranost:

9. Involutivnost komplementiranja:

Dokaz De Morganove formule . Dokažimo najprije da je skup na lijevoj strani jednakosti podskup skupa na desnoj strani. Neka je tj. . Onda vrijedi: i (jer ne smije biti istovremeno ni u jednom ni u drugom skupu). Dakle, i , tj. . Time smo dokazali da je . Obratna inkluzija dokazuje se na sličan način.

Dokaz De Morganove formule Dokažimo najprije da je skup na lijevoj strani jednakosti podskup skupa na desnoj strani. Neka je tj. . Onda je ili (jer nije u oba skupa istodobno). Dakle, ili , tj. . Time smo dokazali da je . Obratna inkluzija dokazuje se na sličan način.

**3.** Uređeni n-terci, Kartezijev produkt skupova ().

Ako su neprazni skupovi, onda definiramo Kartezijev produkt kao skup svih uređenih n-torki takvih da je za sve . Kraća oznaka:

: (alternativna definicija) Ako je , onda taj n-terac možemo promatrati kao funkciju takvu da je i

Obratno, svaka funkcija sa tim svojstvom određuje pripadni n-terac iz Kartezijeva produkta, gdje je. Drugim riječima, Kartezijev produkt skupova može se definirati i kao skup svih funkcija sa svojstvom .

**4.** Definicija funkcije. Osnovni pojmovi u vezi s funkcijom. Jednakost dviju funkcija.

: Neka su zadana dva neprazna skupa i . Funkcijom iz u , zovemo pravilo (postupak) kojim svakom elementu a iz polaznog skupa pridružujemo točno jedan element iz skupa , koji označavamo sa i zovemo slikom elementa a u skupu . Funkciju označavamo sa . Funkcija se često zove i preslikavanje.

Skup zove se domena, a skup kodomena funkcije. Ako je onda **a** zovemo argumentom funkcije, a **b** vrijednošću od za argument **a**.

: Skup poredanih dvojaca zove se graf funkcije .

: Slika funkcije je podskup kodomene u koji se preslika domena, tj. .

: (Bolja i lakša definicija funkcije): Funkcija iz skupa u skup je pridruživanje kojim se svakom elementu skupa po nekom pravilu pridružuje samo jedan element skupa . Funkciju označavamo sa .

: Za dvije funkcije i kažemo da su jednake ako imaju iste domene,tj. , iste kodomene, tj. i ako za sve vrijedi

**5.** Operacije nad funkcijama. Teoremi o tim operacijama. Dokažite da je kompozicija funkcija asocijativna, ali da nije komutativna.

: Za funkciju koja je bijekcija može se definirati inverzna funkcija na sljedeći način: onda i samo onda ako vrijedi.

: Za dvije funkcije i , definirana je nova funkcija zadana sa koja se zove kompozicija funkcija .

Neka je bijekcija. Tada je (identiteta na skupu A) i (identiteta na skupu B). Neka je bijekcija. Vrijedi: .

Teorem (asocijativnost): Za kompoziciju triju ulančanih funkcija vrijedi asocijativnost: .

Dokaz: .

Dokaz da ne vrijedi komutativnost (kontraprimjer): Neka je , i **,** . Tada je , a . Očito je da kompozicija nije komutativna tj. .

**6.** Vrste funkcija (injekcija, surjekcija, bijekcija). Primjeri funkcija (niz, permutacija).

: Za funkciju kažemo da je surjekcija ako je njena slika jednaka čitavoj kodomeni tj.

: Za funkciju kažemo da je injekcija ako za , povlači .

: Za funkciju kažemo da je bijekcija ako je injekcija i surjekcija.

: Slijed ili niz u skupu A je bilo koja funkcija . Vrijednosti te funkcije su , tj. redom pa slijed često označavamo i na ovaj način: .

: Permutacija je bijekcija .

**7.** Ekvipotentnost skupova (). Dokazati da je relacija ekvipotentnosti refleksivna, simetrična i tranzitivna. Pojam kardinalnog broja skupa.

: Kažemo da je skup ekvipotentan (jednakobrojan) sa skupom ako postoji bijekcija . Oznaka

Teorem: Ekvipotentnost ima ova temeljna svojstva:

1. refleksivnost: za svaki skup ,
2. simetričnost: ako je , onda je i ,
3. tranzitivnost: ako je i , onda je i .

Dokaz:

1. Identiteta je bijekcija.
2. Ako je bijekcija, onda je i inverzna funkcija također bijekcija.
3. Ako su funkcije i bijekcije, onda je i njihova kompozicija također bijekcija.

: Ako je zadan konačan skup , onda je njegov kardinalni broj jednak **n**.

: Za skupove kažemo da imaju isti kardinalni broj ako su ekvipotentni, tj. ako postoji bijekcija .

**8.** Konačni i beskonačni skupovi. Prebrojivi i neprebrojivi beskonačni skupovi.

: Za neprazan skup kažemo da je konačan ako postoji i bijekcija . Broj **n** zovemo kardinalni broj skupa .

: Za skup kažemo da je beskonačan ako nije konačan.

: (Alternativna definicaija) Za skup kažemo da je beskonačan ako je ekvipotentan svojem pravom podskupu.

: Za beskonačan skup kažemo da je prebrojiv ako se skup njegovih elemenata može poredati u beskonačni slijed:

: Za beskonačan skup A kažemo da je neprebrojiv ako se ne može poredati u slijed.

**9.** Dokažite da je svaki beskonačni podskup prebrojivog skupa prebrojiv.

Teorem: Svaki beskonačan podskup prebrojiva skupa je prebrojiv skup.

Dokaz: Umjesto skupa dovoljno je tvrdnju dokazati za . Neka je dakle i beskonačan podskup od **.** Odaberimo najmanji prirodni broj u . Zatim iz izbacimo i gledajmo najmanji element u preostalom skupu . Neka je zatim najmanji prirodni broj u , itd. Nije teško provjeriti da je funkcija definirana sa bijekcija, pa je prebrojiv skup.

**10.** Ako je A beskonačan, a K konačan skup, dokažite da je .

Teorem: Neka je beskonačan skup i njegov konačan podskup. Onda su skupovi ekvipotentni.

Neka je . Kako je beskonačan skup, onda postoji prebrojiv podskup, koji sadrži , tj. . Funkcija definirana kao indentitet na i kao pomak za **k** na slijedu :

je očevidno bijekcija.

**11.** Dokažite da su skupovi cijelih brojeva i racionalnih brojeva prebrojivi.

Teorem: Skupovi i su prebrojivi.

Dokaz: Najprije ćemo skup svih pozitivnih cijelih brojeva preslikati bijektivno u skup svih parnih brojeva, a zatim negativne cijele brojeve i nulu bijektivno u neparne prirodne brojeve. To radi funkcija definirana sa :

koja je očevidna bijekcija.

Pretpostaviti ćemo da su brojnik i nazivnik skraćeni do kraja. Dovoljno je pronaći injektivnu funkciju . Takva funkcija se može lako konstruirati kodiranjem i ona glasi: , gdje je predznak racionalnog broja, brojnik, nazivnik. Iz osnovnog teorema aritmetike slijedi da je:

.

Onda je: što znači da je funkcija *f* injektivna.

**12.** Dokažite da je skup neprebrojiv (Cantorov teorem). Kakav je skup svih iracionalnih brojeva , a kakvi skupovi algebarskih i transcedentnih brojeva?

Teorem: Skup realnih brojeva je neprebrojiv, tj. nije ekvipotentan sa skupom .

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da je skup prebrojiv. Prebrojivi skup se može poredati u beskonačni niz. Budući da je ekvipotentan s intervalom , onda se i skup može poredati u beskonačni niz = . Prikažimo ove brojeve u decimalnom zapisu.

...

...

...

gdje su znamenke između . Taj prikaz nije jednožnačan jer se npr. broj s konačnim decimalnim prikazom 0.31 može pisati i u obliku beskonačnog decimalnog prikaza Za svaki broj iz ] rabit ćemo, radi jednoznačnosti, njegov beskonačan decimalni prikaz.

Odaberemo broj tako da je znamenka odabrana tako da je . Tada je: jer se ne podudaraju u prvoj decimali, jer se ne podudaraju u drugoj decimali, itd. Dakle, . To je kontradikcija jer decimalni prikaz od b pokazuje da je . Time je Cantorov teorem dokazan.

Skup algebarskih brojeva je prebrojiv. Skup iracionalnih brojeva je neprebrojiv. Skup transcedentnih brojeva je neprebrojiv.

**13.** Možemo li kardinalne brojeve uspoređivati? Hipoteza kontinuuma.

Kardinalne brojeve bilo koja dva skupa možemo uspoređivati.

: Kažemo da je (kardinalni broj skupa je manji ili jednak od kardinalnog broja skupa ) ako postoji injektivna funkcija .

Ukoliko je i skupovi nisu ekvipotentni, onda pišemo . Ako su skupovi konačni onda izražava uobičajen odnos između brojeva elemenata skupa i broja elemenata skupa .

: Postoje samo i **c** kao vrste kardinaliteta beskonačnih skupova tj. ne postoje kardinalni brojevi takvi da je . Hipoteza kontinuuma se ili prihvaća ili ne prihvaća.

**Napomena:** Znak se čita „alef nula“, „alef jedan“, „alef alfa“, itd.

2. Logika

**1.** Pojam suda i njegove istinosne vrijednosti. Oznake.

: Sud je bilo koja rečenica koja je ili istinita ili lažna.

Svakom sudu pridružujemo vrijednost ako je istinit, a vrijednost ako je lažan. Vrijednost istinitosti suda označavamo sa i nazivamo semantička ili istinitosna vrijednost. Dakle, znači: Sud je istinit, a znači: sud je lažan. Sudove (obično) označavamo velikim slovima

**2.** Koje su osnovne logičke operacije? Što su to semantičke tablice i kako glase za pojedine osnovne logičke operacije? Što su unarne, a što binarnih operacija i koliko ih ima? Što su općenito n-arne logičke operacije i koliko ih ima?

Osnovne logičke operacije su unarne logičke operacije, binarne logičke operacije, ternarne logičke operacije... (općenito n-arne logičke operacije).

: Neka je zadan skup , . Funkcija tj. zove se unarna operacija na .

: Neka je zadan skup , . Funkcija tj. zove se binarna operacija na .

: Neka je zadan skup, . Funkcija tj. zove se n-arna operacija na .

Ukupan broj unarnih operacija je 4, binarnih operacija 16, a općenito različitih n-arnih operacija je .

Semantičke tablice opisuju operacije sa sudovima.

: **Negacija** suda je sud koji označavamo sa . Sud je istinit ako je lažan odnosno lažan ako je istinit. Čitamo ga sa ''ne '', ''non ''.

: Sud nazivamo **konjunkcija** sudova A i B i čitamo , Sud je istinit samo onda ako je istinit sud i ako je istinit sud .

: Sud nazivamo **disjunkcija** sudova i čitamo , . Sud je lažan samo onda ako je lažan sud i ako je lažan sud .

: Sud ("", "") nazivamo **ekskluzivna (isključiva) disjunkcija** sudova . Sud je istinit samo onda ako je jedan od sudova istinit, a drugi lažan.

: Sud ("iz slijedi ", " je posljedica od", " implicira ") nazivamo **implikacija**. Sud je lažan jedino ako je sud istinit, a lažan.

: Sud (" je ekvivalentan sa ") nazivamo **ekvivalencija** (jednakovrijednost). Sud je istinit samo onda ako su vrijednosti istinitosti sudova jednake.

: **Shefferova operacija**  ("") ima značenje "nije istodobno ". Sud je lažan samo onda ako su sudovi istiniti.

: **Lukasiewiczeva operacija**  (" lukasijevič ") ima značenje "niti je niti je ". Sud je istinit onda i samo onda ako su sudovi lažni.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**3.** Logička ekvivalentnost dviju formula algebre sudova (ilustrirati primjerima).

: Kažemo da su dvije formule algebre sudova logički ekvivalentne ako imaju isti broj varijabli i jednake tablice istinitosti.

Primjer: , .

**4.** Osnovna pravila algebre sudova (citirati teorem i dokazati pojedina pravila). Što je to svojstvo dualnosti?

Teorem: Neka su sudovi. Tada vrijedi:

Sva navedena pravila imaju svojstvo dualnosti:Ako u jednom pravilu zamijenimo svuda sa i obratno, i isto tako sa i obratno, dobivamo također valjano pravilo algebre sudova.

**5.** Tautologija i kontradikcija. Zakon isključenja trećeg, pravilo silogizma, zakon neproturječnosti, zakon dvostruke negacije, pravilo kontrapozicije, zakoni apsorpcije.

: Za neku formulu algebre sudova kažemo da je tautologija ako je identički istinita, tj. . Pišemo i čitamo '' je tautologija''.

: Za neku formulu algebre sudova kažemo da je kontradikcija (protuslovlje)ako je identički lažna, tj. .Formula je kontradikcija onda i samo onda ako je tautologija.

Neke tautologije:

**6.** Logički posljedak, modus ponens, modus tollens.

: Kažemo da je sud logički posljedak(zaključak) sudova ako iz pretpostavke da su svi sudovi istiniti slijedi da je i sud istinit. Pišemo: . Sudovi se zovu premise (pretpostavke), a sud kozekvenca (posljedica, zaključak).

Propozicija: Za sudove vrijedi:. Takvo pravilo zaključivanja zove se modus ponens ili pravilo otkidanja.

Propozicija: Za sudove vrijedi: . Takvo pravila zaključivanja nazivamo modus tollens (utvrđuje nešto što nije).

Dokaz obe propozicije: Preko tablice istinitosti.

**7.** Objasniti što je to dokaz po kontrapoziciji i ilustrirati primjerom.

Tvrdnje oblika se dokazujepravilom kontrapozicije ili indirektnotako da se pokaže istinitost tvrdnje .

Primjer: Neka je bilo koji cijeli broj. Ako je paran broj, onda je i paran broj.

Dokaz:Neka je sud "", a sud "". Treba dokazati da je istinita tvrdnja . Dokazat ćemo da je istinita njoj ekvivalentna tvrdnja: . Ako je lažna tvrdnja onda je neparan, tj. , onda je također neparan broj. Dakle, je laž.

**8.** Skupovni prikaz algebre sudova (objasniti analogiju između operacija algebre skupova i operacija algebre sudova).

: Neka je univerzalni skup. Operacije na podskupovima od mogu se opisati pomoću logičkih operacija.

: Neka su (podskupovi univerzalnog skupa). Tada je:

Analogija između sudova i skupova:

|  |  |
| --- | --- |
| Sudovi | Skupovi |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  | - univerzalni skup |
|  |  |

**9.** Pojam Booleove algebre i primjeri. Dualnost operacija u Booleovoj algebri. Što je trivijalna Booleova algebra?

: Neka je skup u kojem su istaknuta dva različita elementa (nula) i (jedan), te neka su zadane dvije binarne operacije (zbrajanje) i (množenje) te jedna unarna operacija na (komplementiranje). Skup zajedno s ove 3 operacije zove se Booleova algebra ako su ispunjena sljedeća svojstva:

Booleova algebra se često definira kao poredani šesterac s prethodno navedenim svojstvima. Iz definicije je vidljivo da sva navedena pravila Booleove algebre imaju svojstvo dualnosti: ako u jednom pravilu zamijenimo svuda sa i obratno, i isto tako sa i obratno, dobivamo drugo valjano pravilo Booleove algebre.

Primjeri Booleovih algebri:

1. Ako je, onda je Booleova algebra.
2. Ako je bilo koji skup i onda je Booleova algebra.

: Booleova algebra je trivijalna ako je tj. ako skup ima točno jedan element.

**10.** Jedinstvenost nule i jedinice u Booleovoj algebri i pravila apsorpcije (dokazati).

Propozicija:

Elementi su u Booleovoj algebri određeni jednoznačno.

U svakoj Booleovoj algebri vrijede pravila apsorpcije**:** koja su jedna drugoj dualna.

Dokaz:

Neka su dvije nule u . Onda iz svojstva slijedi: , odakle iz komutativnosti zbrajanja slijedi da je .

Neka su dvije jedinice u . Iz svojstva slijedi: , odakle iz komutativnosti množenja slijedi da je .

**11.** Booleova podalgebra. Dajte primjer jedne algebre i njene netrivijalne podalgebre.

: Kažemo da je podalgebra Booleove algebre ako je i ako je Booleova algebra s obzirom na operacije naslijeđene iz . To znači da primjenom operacija na elemente iz rezultat ostaje u , dotično iz slijedi .

Primjer: Neka je skup svih djelitelja broja : Definirajmo za

= najveća zajednička mjera od ,

= najmanji zajednički višekratnik od ,

Rabeći osnovni teorem aritmetike nije teško provjeriti da je Booleova algebra. Podalgebra te algerbe je npr.

**12.** Što je izomorfizam Booleovih algebri (ilustrirati primjerom Booleovih algebri ).

: Neka su zadane dvije Booleove algebre i . Za funkciju kažemo da je izomorfizam Booleovih algebri i ako je bijekcija i ako za sve vrijedi:

Primjer:

Neka je skup svih djelitelja broja : Definirajmo za

= najveća zajednička mjera od ,

= najmanji zajednički višekratnik od ,

Rabeći osnovni teorem aritmetike nije teško provjeriti da je Booleova algebra.

je Booleova algebra. Pri tom je

Definirajmo funkciju tako daje , , Lako se vidi da je izomorfizam Booleovih algebri.

**13.** Dokazati da izomorfizam čuva sve operacije, kao i nulu i jedinicu.

Propozicija: Ako je izomorfizam Booleovih algebara, onda vrijedi

Dokaz:

a) Rabeći DeMorganove formule imamo . S pomoću dobivamo .

a zatim .

**14.** Booleove funkcije n varijabla: koliko ih ima različitih i kakve operacije s njima možemo definirati?

Teorem: Booleovih funkcija od n varijabli ima ukupno .

Dokaz:

Neka su konačni skupovi. . po principu prebrojavanja. Ako je tada je .

Neka su A i B konačni skupovi. . Funkcija se može poistovjetiti sa n-tercem . .

Iz slijedi .

: Booleova funkcija je bilo koja funkcija **n** varijabli , gdje je zove se još i n-arna logička operacija. S pomoću Booleove funkcije **n** varijabla možemo definirati n-arne logičke operacije.

**15.** Minterm i maksterm Booleove funkcije. Disjunktivna i konjunktivna forma (citirati teoreme i dokazati ih).

: Minterm funkcije je produkt varijabli koji odgovara n-tercu na kojem je u tablici Booleove funkcije.

: Maksterm funkcije je zbroj varijabli koji odgovara n-tercu na kojem je u tablici Booleove funkcije.

Napomena: Definiramo: .

Teorem: Neka je Booleova funkcija i skup svih elemenata za koje je Onda je:

Ovaj izraz za formulu zove se disjunktivna normalna forma Booleove funkcije . Ovdje pojam disjunkcije ima značenje logičkog zbrajanja u Booleovoj algebri.

Dokaz (Matićev tekst sa ploče...):

ako i samo ako .

.

Teorem: Neka je Booleova funkcija i . Onda se Booleova funkcija može prikazati u konjuktivnoj normalnoj formi:

Konjunkcija ovdje ima značenje logičkog množenja u Booleovoj algebri.

Dokaz (Matićev tekst sa ploče...):

ako i samo ako .

**16.** Problem ispunjivosti za Booleovu funkciju.

: Problem ispunjivostiza Booleovu funkciju je sljedeći: postoji li barem jedan n-terac takav da je .

**17.** Pojam predikata i njegove interpretacije.

: Predikat je funkcija koja svakom elementu **x** iz nekog skupa (domene predikata) pridružuje sud

Skup svih elemenata domene na kojem je predikat istinit zove se karakteristični skup predikata. Kažemo da je predikat jednomjestanako ima samo jednu varijablu , dvomjestan ako ima dvije varijable

,... , **n** mjesni ako ima **n** varijabli . Skup zove se domena predikata. Za svaku varijablu danog predikata pretpostavlja se da je poznat skup (domena) iz kojeg varijabla poprima svoje vrijednosti. Ako semantička (istinitosna) vrijednost nekog predikata ne ovisi o nekoj od varijabli, onda se ta varijabla naziva fiktivna varijabla.

**18.** Što su kvantifikatori i koliko ih ima? Koje poznajete?

Kvantifikatori su logičke operacije koje u predikatu sa **n** varijabli vezuju odgovarajuću varijablu i time smanjuju broj varijabli za te predikat ima varijablu.

: Neka je predikat i **x** iz zadane domene . Onda sa označavamo sud koji je istinit onda i samo onda ako je sud istinit za svaki . Simbol zovemo univerzalnim kvantifikatorom.

: Sa označavamo sud koji je istinit ako postoji barem jedan element za koji je sud istinit. Simbol zovemo egzistencijalni kvatifikator.

Sa označavamo sud koji je istinit ako postoji točno jedan element za koji je sud istinit.

**19.** Slobodna i vezana varijabla.

: Kažemo da je neki nastup varijable u formuli predikatnog računa vezan ako uz nju dolazi kvantifikator ili . Inače kažemo da je nastup varijable slobodan.

**20.** Negacija predikata.

Teorem: Vrijede ove DeMorganove formule za predikate

Dokaz:

Neka je domena predikata Pretpostavimo da je istinit sud. Onda je lažan sud. Dakle, postoji element a iz domene za koji je lažan. Onda je sud istinit, pa je istinit i sud . Slično i kad je sud lažan.

Neka je domena predikata Pretpostavimo da je istinit sud. Onda je lažan sud. Dakle, ne postoji niti jedan element a iz domene za koji je istinit. Onda je sud istinit, pa je istinit i sud . Slično i kad je sud lažan.

**21.** Najvažniji teoremi predikatskog računa. Vrijedi li zakon permutabilnosti za raznorodne kvantifikatore? Primjeri.

Teorem: Vrijede ove DeMorganove formule za predikate

Teorem: Vrijedi:

Teorem: Vrijedi:

Zakon permutabilnosti općenito ne vrijedi za raznorodne kvantifikatore.

Primjer: Neka je i predikat definiran sa Tada je sud istinit (dovoljno je za svaki uzeti ). Sud nije istinit jer ne postoji realni broj **y** koji bi bio veći od svih **.**